

SUBJECT: \_\_\_\_\_

عندما  $a=m$  العلاقة السابقة تفشل وبالتالي سنجد كما في الخطوة السابقة أن

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \cdot \sin ax = \frac{x}{2a} \cdot \cos ax.$$



$$(D^4 - 3D^2 + 2)e^{2x} \cdot x^2$$

مثال: أوجد ناتج

$$= e^{2x} [(D+2)^4 - 3(D+2)^2 + 2] \cdot x^2$$

$$= e^{2x} [D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 2 - 3D^2 - 12D - 12 + 2] x^2$$

نستخدم ارباب x

$$= e^{2x} [D^4 + 8D^3 + 21D^2 + 20D + 6] x^2$$

$$= e^{2x} [0 + 0 + 21(2) + 40x + 6x^2]$$

$$= e^{2x} [6x^2 + 40x + 42]$$

حالة خاصة:

$$(D-m)^2 \cdot e^{mx} \cdot x^l = e^{mx} (D+m-m)^l \cdot x^n$$

يجب أن نذكر أن  $l > n$  ،  $l > m$  ،  $l > n$

$$= e^{mx} \cdot D^l \cdot x^n = e^{mx} \cdot 0 \quad ; \quad l > n$$

عندما  $l \leq n$  فإنه يكون:

$$(D-m)^l \cdot e^{mx} \cdot x^n = \frac{n!}{(n-l)!} \cdot x^{n-l} \cdot e^{mx}$$

$$D^4 \cdot x^5 = D(Dx^5) \cdot D(8x^4) = 20x^3$$

مثال:



$$D^2 x^5 = \frac{5!}{(5-2)!} x^3 = 5 \cdot 4 x^3 = 20 x^3$$

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} \cdot x^n = e^{mx} \cdot \varphi(D+m) x^n$$

$$(D-m)^l \cdot e^{mx} \cdot x^n = \frac{n!}{(n-l)!} e^{mx} \cdot x^{n-l}, \quad l \leq n$$

$$(D-m)^l \cdot e^{mx} \cdot x^n = 0, \quad l > n$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج بأن المجموعة مجموعة الدوال  $\{x^k \cdot e^{mx}\}_{k=0}^{l-1}$  تشكل  
بما عدا الحلول المعمدة المتقاطعة الخطية  $(D-m)^l y = 0$

$$y_1 = e^{mx} \quad y_2 = x \cdot e^{mx} \quad y_3 = x^2 \cdot e^{mx} \quad \dots \quad y_l = x^{l-1} \cdot e^{mx}$$

وكل دالة من هذه الدوال تحقق المعادلة التفاضلية

$$(D-m)^l \cdot e^{mx} \cdot x^{l-1} = e^{mx} \cdot (D+m-m)^l \cdot x^{l-1} \\ = e^{mx} \cdot D^l \cdot x^{l-1} = 0$$

مثال توضيحي:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad \text{لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:}$$

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$$

$$(D-1)^3 y = 0$$

لهذه المعادلة التفاضلية حلول خاصة متقاطعة هي:

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = x \cdot e^x$$

$$y_3 = x^2 \cdot e^x$$

وبالتالي فإن الحل العام هو:

$$y_h = e^x (A_1 + A_2 x + A_3 x^2)$$

2. الدوال  $\sin mx$ ,  $\cos mx$  هم دوال مميزة للتأثير التفاضلي "الناضج" كثير الحدود

$\varphi(D^2)$  وتسمى مميزة مقدارها  $\varphi(D^2)$  أي أن:

$$\varphi(D^2) \cdot \cos mx = \varphi(m^2) \cdot \cos mx$$



SUBJECT:

$$\varphi(D^2) \cdot \sin x = \varphi(m^2) \cdot \sin x$$

الإثبات:

$$D^2 \cdot \sin x = D \cdot D \cdot \sin x$$

$$= D \cdot m \cdot \sin x$$

$$D^2 \cdot \sin x = m^2 \cdot \sin x$$

وبالتالي فإن:

$$\varphi(D^2) \cdot \sin x = \sum_{j=0}^n a_j D^{2j} \cdot \sin x$$

$$= \sum_{j=0}^n a_j \cdot m^{2j} \cdot \sin x$$

$$\varphi(D^2) \cdot \sin x = \varphi(m^2) \cdot \sin x$$

أي أن:

بشكل مشابه تماماً نثبت صحة العلاقة الثانية.

ملاحظة هامة:

هذه الخاصية تفيدنا بتخفيض درجة المؤثر المفاضل من الدرجات العليا إلى الدرجة الأولى كما أنه المثال التالي:

مثال توضيحي:

$$A = D^6 + 2D^5 - 3D^4 + 2D^3 + D^2 + 3D + 1 \text{ أوجد ناتج ما يلي: } A \cdot \sin 2x$$

الحل:

$$(D^2)^3 + 2(D^2)^2 + D - 3(D^2)^2 + 2D^3 + D - 3D + 1 \sin 2x$$

$$m=2, m^2=4$$

نضع  $m=2$  في  $D^2$

$$(4)^3 + 2(4)^2 + D - 3(4)^2 + 2(4) + D + 4 - 3D + 1 \cdot \sin 2x$$

$$(64 + 32D - 48 + 8D + 4 - 3D + 1) \sin 2x$$

$$= (37D + 21) \sin 2x = 37D \cdot \sin 2x + 21 \cdot \sin 2x = 74 \sin 2x + 21 \cdot \sin 2x$$



جـ- إن الدوال "  $\cos mx$  ،  $\sin mx$  " هي دوال مستقيمة معينة للمؤثر التفاضلي  $\varphi(D^2)$  بقيمة معينة مقدارها  $\varphi(1-m^2)$  أي أنها:

$$\varphi(D^2) \cdot \sin mx = \varphi(1-m^2) \sin mx$$

$$\varphi(D^2) \cdot \cos mx = \varphi(1-m^2) \cos mx$$

الإثبات:

$$D^2 \cdot \cos mx = D \cdot D \cdot \cos mx$$

$$= D(-m \cdot \sin mx) = -m^2 \cos mx$$

بشكل عام فإن:

$$D^{2j} \cdot \cos mx = (-m^2)^j \cdot \cos mx$$

وبالتالي:

$$\varphi(D^2) \cdot \cos mx = \sum_{j=0}^n a_j \cdot D^{2j} \cdot \cos mx$$

$$= \sum_{j=0}^n a_j (-m^2)^j \cdot \cos mx = \varphi(1-m^2) \cos mx$$

وبنفس الطريقة نشأت صيغة الحل الخاصة السابقة.

\* ملاحظة هامة:

هذه الخاصة تفيدنا بتفصيل درجة المؤثر المفاضل من الدرجات العليا إلى الدرجة الأولى ومن ثم نشأت صيغة واحدة كمنهج المثال الآتي:

\* مثال توضيحي:

$$(D^7 - 2D^6 + 5D^3 + 2D^2 - 3D + 6) \cdot \sin x$$

أوجد ناتج

الحل:

$$[(D^2)^3 \cdot 0 - 2(D^2)^3 + 5D^3 \cdot 0 + 2D^2 - 3D + 6] \cdot \sin x$$

$$= [(-1)^3 \cdot 0 - 2(-1)^3 + 5(-1)^3 \cdot 0 + 2(-1) - 3D + 6] \cdot \sin x \quad (m=1, m^2=-1)$$

$$= [-0 + 2 - 5 \cdot 0 - 2 - 3D + 6] \cdot \sin x$$

$$= [-9D + 6] \cdot \sin x = -9D \cdot \sin x + 6 \sin x = -9 \cos x + 6 \sin x$$

١٥- المؤثر التفاضلي "المفاضل" كثر الحدود جداء اثنين، أحدهما هي  $x$ .

$$\varphi(D) \cdot x \cdot u(x) = x \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + \varphi'(D) \cdot u(x)$$

$x+1$



$$u \cdot u)^n = u^n \cdot u + n \cdot u^{n-1} \cdot u' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2} u'^2 + \dots + u \cdot u^n$$

تذكر:

$$D^k(x \cdot u) = (x \cdot u)^k = u^k x + k \cdot u^{k-1} \cdot x' + \frac{k(k-1)}{2!} u^{k-2} x''$$

استناداً إلى علاقة ليبنز للمتجهات الملائمة (أو) :

$$D^k(x \cdot u(x)) = x \cdot u^k + k \cdot x' \cdot u^{k-1}$$

$$D^k(x \cdot u(x)) = x \cdot D^k u + k \cdot D^{k-1} u(x)$$

$$= x \cdot D^k u + \frac{d}{dx} D^k u$$

وبذلك

$$\varphi(10) \cdot x \cdot u(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot D^k(x \cdot u(x))$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \left[ x \cdot D^k u + \frac{d}{dx} D^k u(x) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k x \cdot D^k u + \sum_{k=0}^n a_k \frac{d}{dx} D^k u(x)$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^n a_k \cdot D^k u(x) + \frac{d}{dx} \cdot \sum_{k=0}^n a_k \cdot D^k u(x)$$

$$= x \cdot \varphi(10) \cdot u(x) + \varphi'(10) \cdot u(x)$$

فإننا توصلنا إلى:

$$(D^3 - 2D + 3)e^{-x} x = 0$$

أوجد بطريقتين مختلفتين ناتج ما يلي:

الحل:

طريقة أولى:

طريقة الزخرفة الأسية:

$$[D^3 - 2D + 3]e^{-x} x = e^{-x} [10 - 1^3 - 2(10 - 1) + 3] x$$

$$= e^{-x} [0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 20 + 2 + 3] x$$



SUBJECT:

$$= e^{-x} [D^3 - 3D^2 + D + 4] x$$

$$= e^{-x} [0 - 0 + 1 + 4x] = e^{-x} (4x + 1)$$

طريقة ثانية:

باستخدام العلاقة:  $\varphi(D) \cdot x \cdot u(x) = x \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + \varphi'(D) \cdot u(x)$

$$(D^3 - 2D + 3) x \cdot e^{-x} = x(D^3 - 2D + 3) \cdot e^{-x} + (3D^2 - 2) \cdot e^{-x}$$

$$\boxed{f(D) \cdot e^{-x} = \varphi(D) \cdot e^{-x}}$$

$$= x [(-1)^3 - 2(-1) + 3] e^{-x} + (3(-1)^2 - 2) e^{-x}$$

$$= x [-1 + 5] \cdot e^{-x} + e^{-x}$$

$$= e^{-x} [4x + 1]$$

تعميم القاعدة السابقة:

المؤثر القاطع  $\varphi(D)$  و جداء دالتين بإحداها  $x^2$

$$\varphi(D) \cdot x^2 \cdot u(x) = x^2 \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + 2x \cdot \varphi'(D) \cdot u(x) + \varphi''(D) \cdot u(x)$$

$$\varphi(D) \cdot x \cdot x^4 \cdot u(x) = x \cdot \frac{\varphi(D) \cdot x \cdot u(x)}{x \cdot \varphi(D) \cdot u(x)} + \varphi'(D) \cdot x \cdot u(x) \quad \text{الإشارات!}$$

$$= x [x \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + \varphi'(D) \cdot u(x)] + x \varphi'(D) \cdot u(x) + \varphi''(D) \cdot u(x)$$

$$= x^2 \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + 2x \cdot \varphi'(D) \cdot u(x) + \varphi''(D) \cdot u(x) \quad \text{العلاقات: } x^2 + 2x + 1$$

$$\varphi(D) \cdot x^3 \cdot u(x) = x^3 \cdot \varphi(D) \cdot u(x) + 3x^2 \cdot \varphi'(D) \cdot u(x) + 6x \cdot \varphi''(D) \cdot u(x) + \varphi'''(D) \cdot u(x)$$

مثال:

$$(D^4 - 3D^2 + 3D + 1) x^3 \cdot \cos x$$

أد جد ناتج: جداء دالتين بإحداها  $x^3$

الحل:

أعتمد على العلاقة (\*)

$$= x^3 (D^4 - 3D^2 + 3D + 1) \cdot \cos x + 2x (4D^3 - 6D + 3) \cdot \cos x + (12D^2 - 6) \cos x$$



SUBJECT:

$$= x^2 (1 - 1^2 - 3(-1) + 3D + 1) \cdot \cos x + 2x(4(-1)D - 6D + 3) \cdot \cos x + (12(-1) - 6) \cdot \cos x$$

$$(\varphi(D) \cdot x^4 \cdot 2e(x)) = x^4 \cdot \varphi(D) \cdot 2e(x) + 4x^3 \cdot \varphi'(D) \cdot 2e(x) + 6x^2 \cdot \varphi''(D) \cdot 2e(x) + 4x \cdot \varphi'''(D) \cdot 2e(x) + \varphi^{(4)}(D) \cdot 2e(x)$$

**المؤثر النفاظ العكسي:**  
نعرف المؤثر النفاظ العكسي الذي نعرف له  $\frac{1}{D} = D^{-1}$  فإنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على  $y$  كان الناتج هو الدالة  $y$  أي أن:

$$\frac{1}{D} \cdot Dy = D^{-1} \cdot Dy = y$$

$$\frac{1}{D} D = D^{-1} \cdot D = 1$$

نستنتج أن المؤثر النفاظ العكسي هو عملية تكامل ونعرف المؤثر النفاظ العكسي  $\frac{1}{D^n} = D^{-n}$  بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على  $y$  كان الناتج هو الدالة  $y$  أي أن:

$$\frac{1}{D^n} \cdot D^n y = D^{-n} \cdot D^n y = y$$

$$\frac{1}{D^n} \cdot D^n = D^{-n} \cdot D^n = 1$$

$$\frac{1}{D^3} \cdot e^{2x} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{1}{D} \cdot e^{2x} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{e^{2x}}{2} + A$$

$$= \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{e^{2x}}{2} + A = \frac{1}{D} \cdot \frac{e^{2x}}{4} + Ax + B = \frac{e^{2x}}{8} + \frac{A}{2} x^2 + Bx + C$$

$$-\cos x + C = \frac{1}{D} \cdot \sin x$$

$$D^3 \left( \frac{A}{2} x^2 + Bx + C \right) = 0 \quad \text{بجاء أنه يجب أن يكون}$$

**ملاحظة:** معروف بأن عملية تكامل أي دالة معروفة بحدود ثابت إجمالي متناهي عندما يكون  $\frac{1}{D}$  هنا لدينا عملية تكامل مرة واحدة والثابت صوابه كيميائية بجاء أن تأثير المؤثر النفاظ  $D$  على هذا



SUBJECT:

الثابت يساوي الصفر.

وكذلك في المثال السابق نأثير تأثير  $\frac{1}{D^3}$  على الدالة  $e^{2x}$  هو  $\frac{e^{2x}}{8}$  مضافاً إليها كثير حدود من الدرجة الثانية.

لذلك فإن  $D^3(Ax^2 + Bx + C) = 0$

والآن بشكل عام نفرض المؤثر المفاضل العكسي كثير الحدود بالشكل  $\varphi(D) = \frac{1}{\varphi(D)}$  بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على المقدار  $y$ ،  $\varphi(D)y$  كان الناتج  $y$ .

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(D)y = \varphi^{-1}(D) \cdot \varphi(D)y = y$$

أي أن  $\varphi(D)$  كثير حدود مفاضل من الدرجة  $n$ .

بناءً على هذا فإنه إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية  $\varphi(D)y = F(x)$

فلايجاد حل خاص لهذه المعادلة نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر العكسي  $\frac{1}{\varphi(D)}$  أي أنه:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(D)y = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot F(x)$$

$$y = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot F(x) + N(x)$$

حيث أنه  $\varphi(D) \cdot N(x) = 0$

$$\varphi(D)y = 0$$

وهذا يعني أن  $N(x)$  هي حل للمعادلة التفاضلية

$$\varphi(D)y = 0$$

لذلك أننا ظهرت  $N(x)$  ويمكن الاستغناء عنها في جزء من الحل العام للمعادلة التفاضلية.